数理解析研究所講究録
第 1833 巻 2013 年 1-4

WIJSMAN 位相の零次元性について

島根大学・総合理工学研究科　末吉亮也
RYOYA SUEYOSHI
INTERDISCIPLINARY FACULTY OF SCIENCE AND ENGINEERING,
SHIMANE UNIVERSITY

1. Introduction

(X, d) を距離空間, $CL(X)$ を X の空でない閉集合全体とする. 任意の $x \in X$, $A \in CL(X)$ に対して, 点 x と集合 A の距離 $d(x, A)$ を $d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$ で定める. また任意の $x \in X$ に対して, 実数値関数 $f_x : CL(X) \to \mathbb{R}$ を $f_x(A) = d(x, A)$ で定める. このとき $\{f_x : x \in X\}$ によって定まる $CL(X)$ 上の弱位相, すなわち $\{f_x{}^{-1}(V) : V$ は $\mathbb{R}$ の開, $x \in X\}$ を準基にもつ位相を **Wijsman 位相**といい, $\mathcal{T}_{w(d)}$ と書く.

可分な距離空間に対する Wijsman 位相の性質は, 今まで多くの研究者によって研究されてきた. Lechicki, Levi [5] は, 距離空間 (X, d) が可分であることと, その Wijsman 位相 $\mathcal{T}_{w(d)}$ が距離化可能であることが同値であることを証明し, Beer [1] は, 可分な距離空間に対する Wijsman 位相が Polish であることを証明した. この結果から, Costantini [4] は空間 X が Polish であることと, 任意の conpatible な X 上の距離 d に対して, d に対する Wijsman 位相 $\mathcal{T}_{w(d)}$ が Polish であることが同値であることを証明した.

一方で, 非可分な距離空間に対する Wijiman 位相の性質については, 最近まであまり研究されてこなかった. その状況の中で, Cao, Junnila, Moors [3] は, 一般の離散距離空間に対する Wijsman 位相についていくつかの定理を証明し, Wijsman 位相の零次元性に関する問題を提起した.

本稿では, Cao, Junnila, Moors [3] による Wijsman 位相の零次元性に関する研究を紹介するとともに, 彼らの提起した問題に対する反例を報告する.

2. Wijsman 位相

この節では, Wijsman 位相がもつ基本的性質を紹介する. 詳しくは [2] を参照して頂きたい. Wijsman 位相において, 点列の収束に関して次の同値条件が知られている.

Proposition 2.1. (X, d) を距離空間, $A_0 \in CL(X)$, $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ を $CL(X)$ の点列とする. このとき A_i が Wijsman 位相に関して A_0 に収束することの必要かつ十分な条件は, 任意の $x \in X$ に対して, 実数列 $\{d(x, A_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ が $d(x, A_0)$ に収束することである.

この同値条件から,Wijsman 位相における収束について, 以下のことが分かる.

Example 2.2. (X,d) を 2 次元ユークリッド空間とする. 任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して $B_i = \{(1/i,0),(1/i,i)\}$, $B_0 = \{(0,0)\}$ とおく. このとき $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ は Wijsman 位相に関して B_0 に収束する.

Example 2.3. (X,d) を 2 次元ユークリッド空間とする. 任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して $C_i = \{(1/i,0)\} \times [0,i]$, $C_0 = \{(0,0)\}$ とおく. このとき $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ は Wijsman 位相に関して C_0 に収束しない.

次に hyperspace topology としてよく知られている Vietoris 位相と Wisjman 位相の関係について述べる. Vietoris 位相とは次で定義される位相である.

Definition 2.4. X を Hausdorff 空間とする. 任意の $E \subset X$ に対して,

$$E^+ = \{A \in CL(X) : A \subset E\}$$
$$E^- = \{A \in CL(X) : A \cap E \neq \varnothing\}$$

とするとき, $\{V^+ : V$ はXの開 $\} \cup \{W^- : W$ はXの開 $\}$ を準基にもつ $CL(X)$ 上の位相を **Vietoris 位相**といい, $\mathcal{T}_{\mathcal{V}}$ と書く.

一般に Wisjman 位相と Vietoris 位相の関係について次のことが知られている ([2, Theorem 1.2.6, 2.2.5] 参照).

Proposition 2.5. (X,d) を距離空間とし, d と同じ位相を生成する X 上の距離全体の集合を $\mathcal{D}$ とする. このとき,

$$\sup\{\mathcal{T}_{w(d')} : d' \in \mathcal{D}\} = \mathcal{T}_{\mathcal{V}}.$$

このことから, 一般に Wiisman 位相は Vietoris 位相より弱いことが分かる. 一方, Example 2.2 における閉集合列 $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ は Vietoris 位相に関して B_0 に収束しない. よって Wijsman 位相と Vietoris 位相は一般には異なる位相である.

次の例 ([2, Example2.1.6] 参照) から分かるように Wijsman 位相は, 距離に大きく依存する.

Example 2.6. $X = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ とし, $d,\ d' : X \times X \to \mathbb{R}$ を次で定める. 任意の $x_i,\ x_k \in X$ に対して

$$d(x_i,x_k) = \begin{cases} 0 & \text{if } i = k, \\ 1 & \text{if } i \neq k, \end{cases}$$

$$d'(x_i,x_k) = \begin{cases} 0 & \text{if } i = k, \\ 1 & \text{if } 2 \leq i < k, \\ 2 & \text{if } i = 1, i < k. \end{cases}$$

このとき, d, d' は X 上の距離となる. また d, d' はともに離散位相を生成するが, 一方で $\mathcal{T}_{w(d)} \neq \mathcal{T}_{w(d')}$ となる.

3. Cao, Junnila, Moors の問題

Definition 3.1. (X,d) を距離空間とする. 任意の異なる $x,y \in X$ に対して, $d(x,y) > \varepsilon$ となるような正の実数 ε が存在するとき, d を**一様離散距離**であるという.

Definition 3.2. X を Hausdorff 空間とする. 任意の $x \in X$ と, x を含む任意の X の開集合 U に対して, $x \in V \subset U$ となるような X の開かつ閉集合 V が存在するとき, X を**零次元**であるという.

Definition 3.3. X を Hausdorff 空間とする. 任意の異なる 2 点 $x,y \in X$ に対して, $x \in V$, $x \notin V$ となる X の開かつ閉集合 V が存在するとき, X を **完全不連結** であるという.

明らかに, 零次元空間は完全不連結である.

Cao, Junnila, Moors は離散位相を生成するような距離に対する Wijsman 位相について, 次の定理を証明した.

Theorem 3.4 (Cao, Junnila and Moors [3]). X を空でない集合とし, d を有限個の値をとる (すなわち, $|d(X \times X)| < \aleph_0$を満たす) X 上の離散距離とするとき, $(CL(X), \mathcal{T}_{w(d)})$ は零次元である.

Theorem 3.5 (Cao, Junnila and Moors [3]). X を空でない集合とし, d を任意の X 上の離散距離とするとき,$(CL(X), \mathcal{T}_{w(d)})$ は完全不連結である.

これらの定理に関して, 彼らは次の問題を提起した.

Question 3.6 (Cao, Junnila and Moors [3]). X を空でない集合とし, d を任意の X 上の離散距離（または一様離散距離）としても, $(CL(X), \mathcal{T}_{w(d)})$ は零次元になるか.

次がこの問題に対する反例である.

Example 3.7 ([6]). $\mathbb{R}^+$ 上の距離 $d: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ を次で定める.

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = y, \\ 1 & \text{if } 0 < |x-y| \leq 1, \\ |x-y| & \text{if } |x-y| > 1. \end{cases}$$

このとき, d は $\mathbb{R}^+$ 上の一様離散距離となるが, $CL(\mathbb{R}^+)$ 上の d に対する Wijsman 位相 $\mathcal{T}_{w(d)}$ は零次元でない.

証明の概略. 任意の $x \in \mathbb{R}^+$ と, 任意の $a < b$ を満たす $a, b \in \mathbb{R}$ に対して,

$$S^x_{(a,b)} = \{A \in CL(x) : a < d(x,A) < b\}$$

とおくと, $\{S^x_{(a,b)} : a, b \in \mathbb{R}(a < b), x \in X\}$ は, $\mathcal{T}_{w(d)}$ の準基になる ([2, §2.1] 参照). したがって $(CL(\mathbb{R}^+), \mathcal{T}_{w(d)})$ が零次元でないことを示すためには, $S^0_{(1,3)}$ に含まれる任意の空でない $(CL(\mathbb{R}^+), \tau_{w(d)})$ の開集合 $\mathcal{U}$ が閉集合でないことを示せばよい.

実際, $S^0_{(1,3)}$ に含まれる任意の空でない $(CL(\mathbb{R}^+), \tau_{w(d)})$ の開集合 $\mathcal{U}$ を与える. このとき, 半順序集合 $(\overline{\mathcal{U}}, \subset)$ は極大元 E_0 をもつことが分かる. さらにこの E_0 は $\mathcal{U}$ に含まれないことが示される. よって $\overline{\mathcal{U}} \neq \mathcal{U}$ より, $\mathcal{U}$ は閉集合でない. □

References

[1] G. Beer, *A Polish topology for the closed subsets of a polish*, Proc. Amer. Math. Soc. **113** (1991), 1123–1133.

[2] G. Beer, *Topologies on closed and closed convex sets*, Kluwer Academic Publishers, Dodrecht, 1993.

[3] J. Cao, H. J. K. Junnila and W. B. Moors, *Wijsman hyperspaces: Subspaces and embeddings*, Topology Appl. **159** (2012), 1620–1624.

[4] C. Costantini, *Every Wijsman topology relative to a Polish space is Polish*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1955), 2569–2574.

[5] A. Lechicki, S. Levi, *Wijsman convergence in the hyperspace of a metric space*, Boll. Un. Mat. Ital. (7) **1-B** (1987), 439–452.

[6] R. Sueyosi, *On zero-dimensionality of Wijsman hyperspaces on discrete spaces*, Sci. Math. Jpn. to appear.

Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering, Shimane University, Matsue, 690-8504, Japan

E-mail address: `s119315@matsu.shimane-u.ac.jp`